Klausur - Aufgaben

Milena Vogel, 7349849
Gruppe 3
Nils Bleyer, 7305994
Gruppe 4

1) Für eine Abbildung $\det: K^{n\times n} \to K$, $A \mapsto \det A$ (Determinante) gilt:

(i) $\det(\mu \cdot A) = \mu \cdot \det A$ für alle $\mu \in K$

(ii) $\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n$

(iii) $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar

(iv) $\det(A+B) = \det A + \det B$

[redacted]

2) Betrachte die folgenden Mengen mit ihren Verknüpfungen.

(i) Die Menge $\mathbb{N}$ mit der Verknüpfung $+$ ist eine Gruppe.

(ii) Die Menge $\mathbb{Z}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist ein Körper.

(iii) Die Menge $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ der Restklassen modulo m mit der Verknüpfung $+$ ist eine abelsche Gruppe.

(iv) Die Menge $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $\cdot$ ist abelsche Gruppe.

[redacted]

3) Für Polynome $K[t] := \{\sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ mit $a_0, \ldots, a_n \in K\}$ über Körper K gilt:

(i) Hat eine Funktion $f \in K[t]$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$, so gibt es eine eindeutige Funktion $g \in K[t]$ mit $f(t) = (t-\lambda)\, g(t)$ und $\deg g = \deg f + 1$.

(ii) $(K[t], +, \cdot)$ ist kommutativer Körper.

(iii) Jedes Polynom in $\mathbb{C}[t]$ hat die Darstellung

$f(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_m)^{r_m}$ mit $\lambda_{1,\ldots,m}$ Nullstellen von f und $r_{1,\ldots,m}$ die jeweilige Vielfachheit der Nullstellen.

(iv) Für die Multiplikation zweier Funktionen $f, g \in K[t]$ ist

$$(f\cdot g)(t) = \left(\sum_{j=0}^{m} a_j t^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j t^j\right) = \sum_{j=0}^{m\cdot n} a_j b_j t^{2j}$$

[redacted]

4.) Im K-Vektorraum V (über Körper K) mit innerer Verknüpfung $\oplus : V\times V \to V$, $(v,w)\mapsto v\oplus w$

und äußerer Verknüpfung $\cdot : K\times V \to V$, $(\lambda, v)\mapsto \lambda v$, $\lambda\in K$ gilt:

(i) $v\cdot w = 0 \Leftrightarrow v=0$ oder $w=0$ für $v,w\in V$

(ii) W ist Untervektorraum von V, wenn $(\lambda v+\mu w)\in W$ für alle $v,w\in W$, $\lambda,\mu\in K$ und $W\subset V$ Teilmenge.

(iii) Für $V=\mathbb{R}^2$ ist $W=\left\{ \binom{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}^2 : a_1x_1+a_2x_2=b,\ a_1,a_2\in\mathbb{R} \text{ fest},\ b\in\mathbb{R}, b\neq 0\right\}$ Untervektorraum von V.

(iv) $\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

[redacted]

5) Welche der folgenden Gleichungen ist keine gewöhnliche Differentialgleichung?

(i) $y' = x^2 y$

(ii) $x = \frac{y'}{y^2}$

(iii) $y' = \int_0^1 \exp(-xs)\,xy\,ds$

(iv) $\log(y') + \log\left(\frac{e}{y'}\right) = xy$ [redacted]

6) Eine Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $(x,y)\mapsto f(x,y)$ $(\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ heißt Lipschitz-stetig bzgl. y, falls es eine Konstante $L\geq 0$ gibt, sodass gilt:

(i) $\|f(x,y)-f(x,\tilde y)\| \leq L\cdot\|y-\tilde y\|$

(ii) $\|f(x,y)-f(x,\tilde y)\|\cdot L \leq \|y-\tilde y\|$

(iii) $L\cdot\|y-\tilde y\| \leq \|f(x,y)-f(x,\tilde y)\|$

(iv) $\|f(x,y)-f(x,\tilde y)\| \leq \|\tilde y - x\|\cdot L$

[redacted]

7.) Welche Aussage über das Newton-Verfahren ist falsch?

(i) Das Newton-Verfahren kann zur iterativen Berechnung von Nullstellen verwendet werden.

(ii) Das Verfahren kann angewendet werden, falls $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zweimal diff'bar, f konvex auf $[a,b]$, $f(a)<0$ und $f(b)>0$.

[redacted]

(iii) Die Iterationsvorschrift für das Verfahren lautet: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n\geq 0$, Startwert x_0

(iv) Albert Einstein hat das Verfahren erfunden.

Aufgabe 2:

a) Sei $A \in K^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass v für alle $k \in \mathbb{N}$ ein Eigenvektor der Matrix A^k zum Eigenwert λ^k ist.

b) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $v^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v^3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v^4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(ii) Welcher der Vektoren $v^i, i = 1..4$ ist Eigenvektor zu welchem Eigenwert?

c) Überprüfen Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto c - x_1^2 - x_2^2$, $c \in \mathbb{R}$ auf lokale Extrema.

Aufgabe 3:

Sei $f: (\mathbb{R}^n \setminus 0) \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $x \mapsto f(r)$ mit $r := \|x\|$ (Euklidische Norm von x). In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\Delta f(r) = f''(r) + f'(r)\frac{n-1}{r}$ gilt, wobei Δ den Laplace-Operator bezüglich x bezeichnet. Zeigen Sie mithilfe dieser Darstellung, dass die folgenden Funktionen Lösungen der Wellengleichung $\Delta F(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} = 0$ sind:

a) $F_1: (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x,t) := \frac{\sin(r - ct)}{r}$ mit $r = \|x\|$ und $c \neq 0$.

b) $F_2: (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $F_2(x,t) := \frac{\exp(i(r - ct))}{r}$ mit $r = \|x\|$ und $c \neq 0$.

Aufgabe 4:

a) Sei $F: V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch die Umkehrabbildung $F^{-1}: W \to V$ linear ist

b) Sei $A = (a_{ij})_*$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ gilt.

$* \; i,j \in \{1, \ldots, n\}$

Aufgabe 5:

a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.
Eine Funktion $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$, die

- der Graph von φ ist in Ω enthalten
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \;\; \forall x \in I$

erfüllt, ist Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = c \end{cases} \quad \text{(System gewöhnlicher Dgl.)}$$

Zeigen Sie, dass die Äquivalenz zur Integralgleichung gilt.
(φ erfüllt die Integralgleichung $\varphi(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi(t))\,dt \;\; \forall x \in I$.

b) Lösen Sie nachfolgende gewöhnliche Dgl. durch Trennung der Variablen.

$$y' = \exp(y) \cos(x)$$

c) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben mit $y > 0$:

$$y' = xy^2 \quad y(0) = 1$$